RW 10.19

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

find $x(t)$

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2t+2\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2t+2\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-t+\tau} \\ e^{-2t+2\tau} \end{bmatrix} d\tau \qquad 2e^{-t+\tau} = 2(e^{-t}e^{\tau})$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2e^{-t}\,e^{\tau} \\ e^{-2t}\,\frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix} \right|_0^t$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2e^{-t}e^{t}) - (2e^{-t}e^{0}) \\ \left(\frac{e^{-2t}e^{2t}}{2}\right) - \left(\frac{e^{-2t}e^{0}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2 - 2e^{-t} \\ e^{-2t} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 - 3e^{-t} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = x(t)}$$